On considère le système suivant : $\begin{cases} x+(m+1)y=m+2 \\ mx+(m+4)y=3 \end{cases}$

1. Pour quelle valeur de m le système est-il de Cramer ? ***1.5 pts***
2. Déterminer les solutions du système en fonction des valeurs de m ***1.5 pts***
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $A_n=(x-1)^{n+2}+x^{2n+1}$ est divisible par $B=x^2-x+1$. ***2 pts***

Exercice 2 : 5 pts

1. Soit n un entier naturel et α un réel vérifiant $\alpha \neq 0[\pi]$. Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$ le polynôme P défini par : $P=X^{2n}-2X^n\cos\alpha+1$ ***2 pts***
2. Résoudre dans C l'équation $(Z+1)^n=e^{2ina}$. ***1.5 pts***
3. En déduire la valeur de $P=\prod_{k=0}^{n-1}\sin(a+\frac{k\pi}{n})$. ***1.5 pts***

Exercice 3 : 10 pts

On propose de résoudre $\dddot{y}-\ddot{y}+\dot{y}-y=0$; on note y une solution de cette équation différentielle et on pose : $Z(t)=(y(t),\dot{y}(t),\ddot{y}(t))$.

1. Monter qu'il existe une matrice A telle que $\frac{dZ}{dt}=AZ$. ***1.5 pts***
2. Calculer le polynôme caractéristique de A. ***1 pts***
3. Calculer les valeurs propres et déduire la matrice diagonaliser de A. ***2 pts***
4. On considère les vecteurs propres suivant : $\vec{u}_1=(1,1,1)$; $\vec{u}_2=(1,i,i)$; $\vec{u}_3=(1,-i,-i)$
   a) Ecrire la matrice de passage P correspondant aux vecteurs propres. ***0.5 pt***
   b) Résoudre le système d'équation $\frac{dZ}{dt}=AZ$ ***2 pts***
   c) En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle $\dddot{y}-\ddot{y}+\dot{y}-y=0$ ***1pt***
   d) Préciser celles vérifiant le problème de Cauchy : $\begin{cases} \dddot{y}-\ddot{y}+\dot{y}-y=0 \\ y(0)=1;\ \dot{y}(0)=-1;\ \ddot{y}(0)=3 \end{cases}$ ***2 pts***